

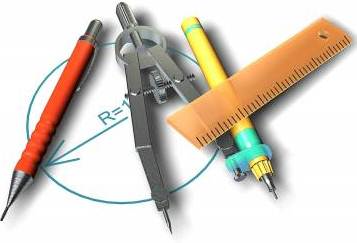
Міністерство освіти і науки України

Департамент освіти і науки Дніпропетровської обласної державної адміністрації

Відділ освіти Криворізької районної державної адміністрації



**Розв’язування задач з параметрами графічним методом**





Автор методичної розробки:

учитель  математики та інформатики

КНЗ «Лозуватська ЗШ І-ІІІ ступенів №1

імені Т.Г.Шевченка»

**Ткаченко Оксана Петрівна**



2015 р.

|  |  |
| --- | --- |
| **Укладач:**  **Ткаченко О.П.** | учитель математики та інформатики, спеціаліст вищої категорії, «учитель-методист» Комунального навчального закладу «Лозуватська ЗШ І-ІІІ ступенів №1 імені Т.Г.Шевченка» |

|  |  |
| --- | --- |
| **Рецензенти:**  **Бібік Т.Л.**  **Глотенко О.Р.** | методист Комунальної установи «Криворізький районний науково-методичний кабінет» Криворізької районної ради  учитель математики, спеціаліст вищої категорії,  «учитель–методист» Комунального навчального закладу «Недайводський навчально-виховний комплекс» |

Розв’язування задач з параметрами графічним способом. Практико-орієнтований посібник. – село Лозуватка, Криворізький район, 2015 р., 23с.

Метою цього посібника є формування в читачів мислення розгалудженя, елементарних навичок роботи з параметрами, розвиток графічної культури, творчого мислення.

Посібник може бути використаний на уроках математики (особливо в профільних класах), на факультативах, при підготовці учнів до ДПА та ЗНО.

Специфіка задач із параметрами полягає в тому, що вони охоплюють усі теми алгебри, тому є унікальним засобом для систематизації й узагальнення навчальних досягнень учнів. Високий рівень абстрагування та алгоритмізації, що містять задачі з параметрами, розвиває навички застосування евристичних, дослідницьких прийомів роботи, вміння встановлювати причинно-наслідкові зв’язки, культуру мислення, ініціативу, творчість, а також забезпечити інтелектуальний розвиток особистості.

Цей збірник допоможе вчителям формувати в учнів міцні навички розв’язування задач з параметрами різної складності. Опрацьовуючи матеріал посібника, учні зможуть ліквідувати прогалини в знаннях і вміннях, розширити та поглибити знання, підвищити рівень власної підготовки.

Схвалено науково-методичною радою Криворізького районного науково-методичного кабінету

Протокол №\_\_\_\_\_\_від\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**Зміст**

1. Знайомство з параметром…………………………………………………………4
2. Що потрібно знати і чим користуватись…………………………..………….…5
   1. Прямі і кола……………………………………………………………………5
   2. Модуль…………………………………………………………....……………5
   3. Квадратична функція і не тільки……………………………………………..6
3. Приклади розв’язування задач……………………………………………...….…7

3.1. Рівняння………………………………………………………………………..7

3.2. Системи рівнянь……………………………………………………..………12

3.3. Нерівності…………………………………………………………………….17

Список використаних джерел………………………………………………………...23

1. **Знайомство з параметром**

В основу розв’язання задач із параметрами покладено такий принцип: значення параметра (або параметрів) вважається довільно фіксованим і розв’язок задачі знаходитися традиційними методами. Проте наявність параметрів у задачі передбачає обов’язкове дослідження існування розв’язку залежно від конкретних числових значень параметрів із області їх допустимих значень, а також знаходження всіх таких розв’язків. Задачі з параметрами, таким чином, розглядаються як ціла множина рівнянь, нерівностей або їх систем, які отримуються, коли параметри набувають конкретних значень. Форма запису відповіді у задачах з параметрами має спеціальний вигляд: значення невідомих вказуються для кожного допустимого значення параметрів.

Для розв’язання задач з параметрами необхідні ґрунтовні знання властивостей елементарних функцій, рівносильних перетворень рівнянь та нерівностей.

Задача з параметрами крім букв, що позначають невідомі, містять інші букви, які називаються ***параметрами***. Фактично ми маємо справу не з одним завданням, а з їх нескінченною множиною.

**Розв’язати завдання з параметром** означає, що потрібно навести у відповіді сімейство розв’язків відносно невідомої величини для всіх можливих сталих величин ***(параметрів).***

Важливо! Параметр у відповіді повинен «пробігти» всю числову вісь, або всі значення , що обумовлені умовою задачі.

Так, з параметрами учні зустрічаються при введенні деяких понять. Розглянемо як приклади наступні об’єкти.

Функція пряма пропорційність: *y=kx* (*x* і *y -* змінні, *k –* параметр, );

Лінійна функція: *y=kx+b* (*x* і *y -* змінні, *k* i b *–* параметри);

Лінійне рівняння: *ax+b=0* (*x -* зміннa, ai b *–* параметри);

Рівняння першого степеня: *ax+b=0* (*x -* зміннa, ai b *–* параметри, );

Квадратне рівняння: (*x -* зміннa, *a, b і с –* параметри, ).

До задач з параметрами, можна віднести, наприклад, пошук розв’язків лінійних і квадратних рівнянь в загальному вигляді, дослідження кількості їх коренів в залежності від значення коефіцієнтів.

Основне, що потрібно засвоїти при першому знайомстві з параметром, - це необхідність обережного звертання до фіксованого але невідомого числа.

Існує три загальноприйняті методи розв’язання задачі з параметром: аналітичний, графічний та відносно параметра.

Аналітичний - універсальний, але найбільш складний, і потребує високої математичної грамотності.

Графічний – виключно красивий і наочний але не завжди доречний і потребує мистецтва роботи з графіками.

В цьому посібнику ми звернемо увагу саме на графічний спосіб.

Суть методу полягає в тому, що задачу зводять до з’ясування взаємного розташування графіків рівнянь що містять параметри по відношенню до графіків рівнянь які у своєму складі не містять параметрів.

Найчастіше графічно розв’язують ті задачі, де потрібно знайти кількість розв’язків, коли в задачі є «впізнавана функція», в задачах з модулями.

До того ж в деяких випадках аналітичний метод розв’язування «тягне за собою» таку кількість систем і сукупностей, що в них дуже легко заплутатись. І тоді на **допомогу приходить графіка.**

1. **Що потрібно знати і чим користуватись.**
   1. **Прямі і кола.**

Щоб розв’язувати графічно задачі з параметрами необхідно вміти будувати і перетворювати графіки функцій та залежностей. В цьому розділі – відомості про графіки функцій і залежностей, які найчастіше зустрічаються.

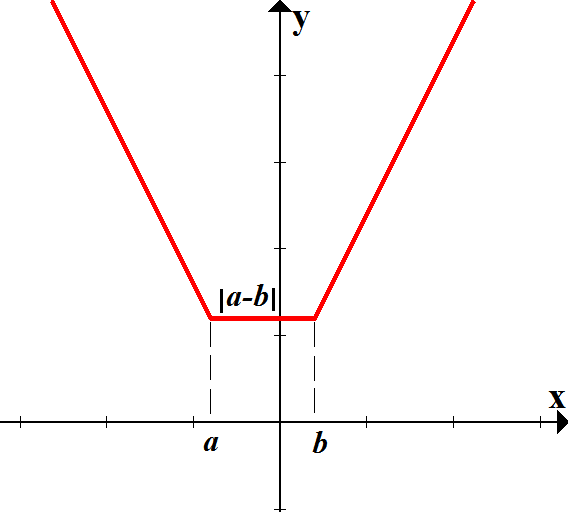
1. Пряма *y=kx+b*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *k* – *змінна*  *b - const* | пряма «обертається» навколо точки (0; *b*)  *(рівняння прямої з полюсом)* | |
| *b* – *змінна*  *k - const* | *y=kx* рухається вздовж осей координат | |
| *y=k1 x+b1*  *y=k2 x+b2* | *k1 = k2* | прямі паралельні |
| *k1 k2 = - 1* | прямі перпендикулярні |

1. Коло *(x-a)2 + (y-b)2=R2*

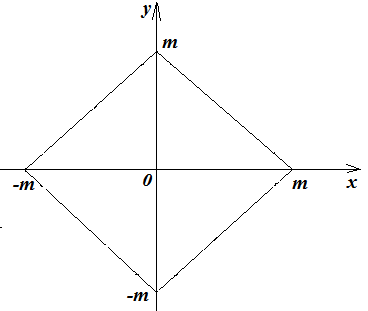
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *a* – *змінна*  *b – const*  *R - const* | коло «рухається» *вздовж осі Ох* | |
| *b* – *змінна*  *a - const*  *R - const* | коло «рухається» *вздовж осі Оу* | |
| *a* – *const*  *b – const*  *R - змінна* | «сім’я» концентричних кіл з центром в точці *(а; b)* |  |

Коло і пряма: перетинаються (2 спільні точки), дотикаються (1 спільна точка), не перетинаються (не мають спільних точок).

2.2. **Модуль.**

Графік функції виду *у = |х - а| + |х - b|*

«дно»: *у = |а - b|*

**

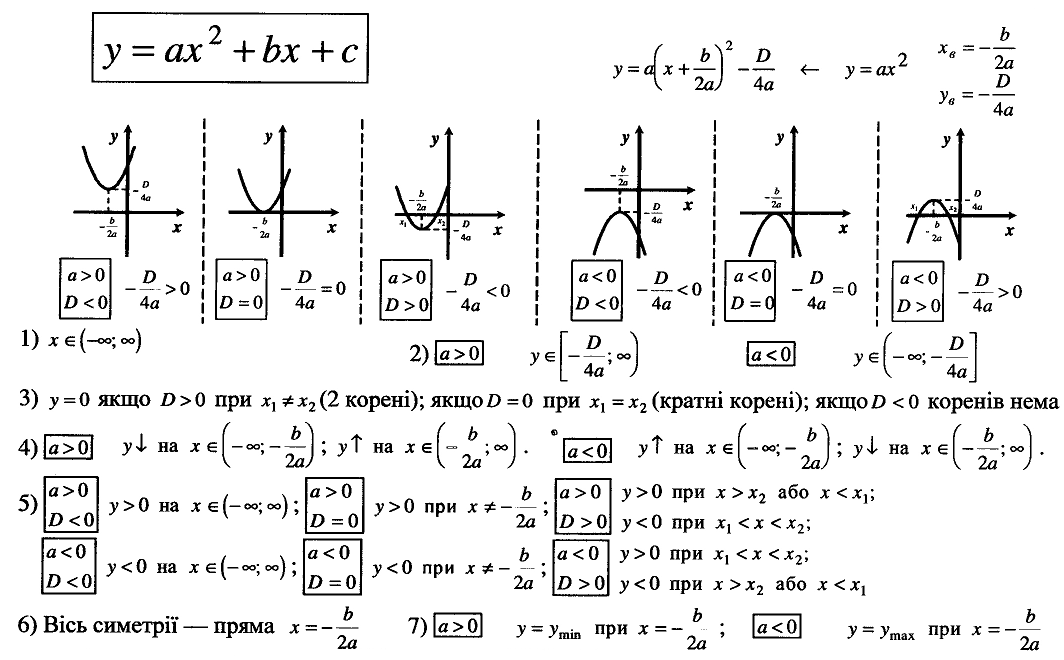
Графік залежності виду *|х| + |у|= т – квадрат*

*|х - а| + |х - b|= т*

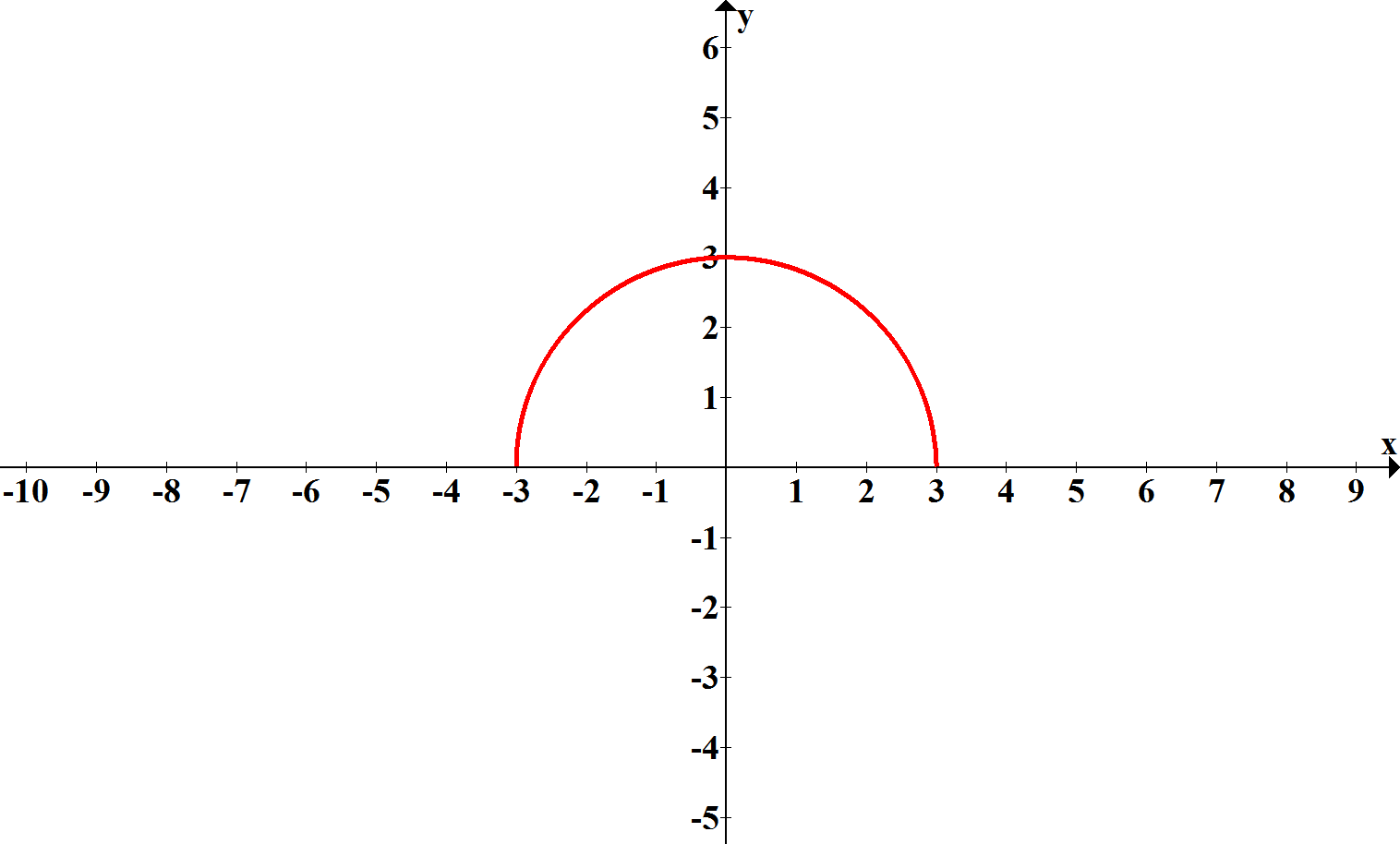
|  |  |
| --- | --- |
| *a* – *змінна*  *b – const*  *т - const* | квадрат «рухається» *вздовж осі Ох* |
| *b* – *змінна*  *a - const*  *т - const* | квадрат «рухається» *вздовж осі Оу* |
| *a* – *const*  *b – const*  *т - змінна* | «сім’я» концентричних квадратів з центром в точці *(а; b)* |

* 1. **Квадратична функція і не тільки…**

Про графік квадратичної функції написано багато. На мою думку цей конспект (посібник Г.В.Апостолова, В.В.Ясінський «Перші зустрічі з параметром»)– найкраще узагальнення відомостей про графік квадратичної функції.

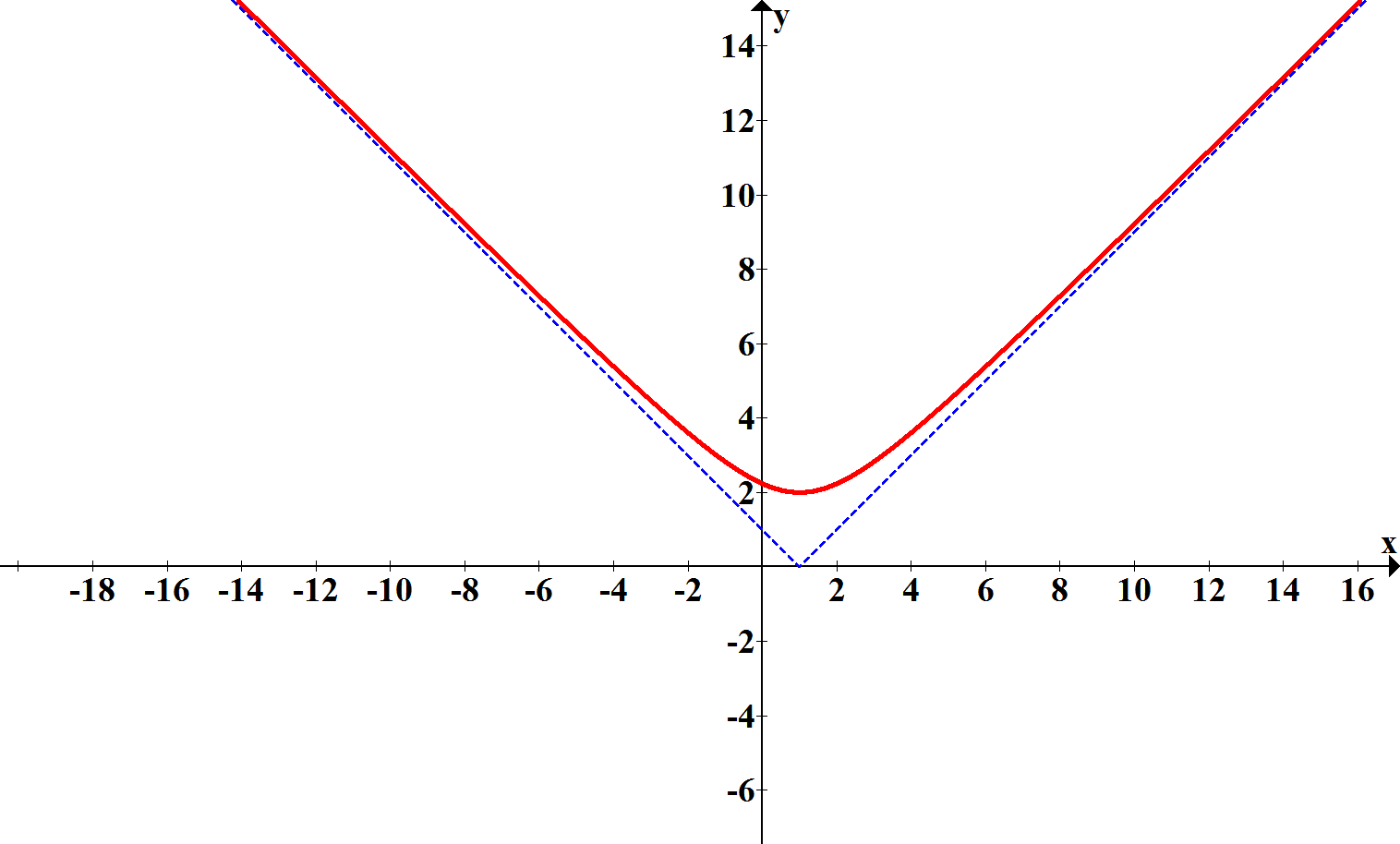
Але розділ називається «Квадратична функція і не тільки». Тож давайте дослідимо ще деякі випадки непрямого використання квадратичної функції на прикладах.

Графік функції – півколо з центром в (0;0), радіусом **3** (**y ≥ 0)**

****

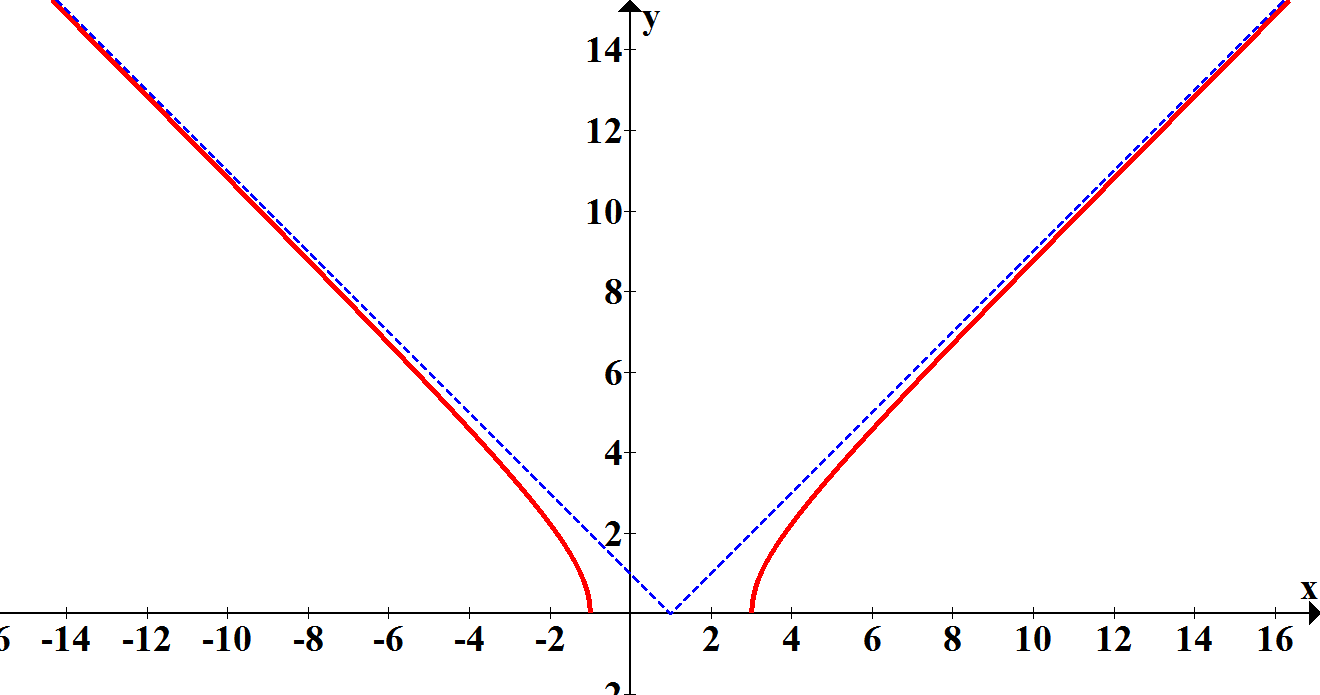
ОВ:

– асимптоти

****

ОВ:

- асимптоти

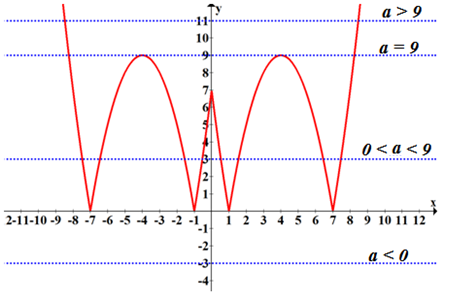


1. **Приклади розв’язування задач.**
   1. **Рівняння**
2. **Знайдіть всі значення параметра а при якому рівняння має менше 4 коренів**

Розв’язання

Запишемо рівняння в виді:

Нехай *f(x) =*   *g(x)=*



Схематично зобразимо графіки функцій *f(x)* та *g(x)*

Графік функції  *g(x)= -* пряма, паралельна осі *Ох*. Розв’язки рівняння – абсциси точок перетину графіків функцій. Пряма не перетне графік *f(x),* якщо

*а < 0* і якщо *а >9*, то пряма матиме з графіком менше чотирьох точок перетину (а саме дві). Тобто, рівняння має менше 4 коренів коли

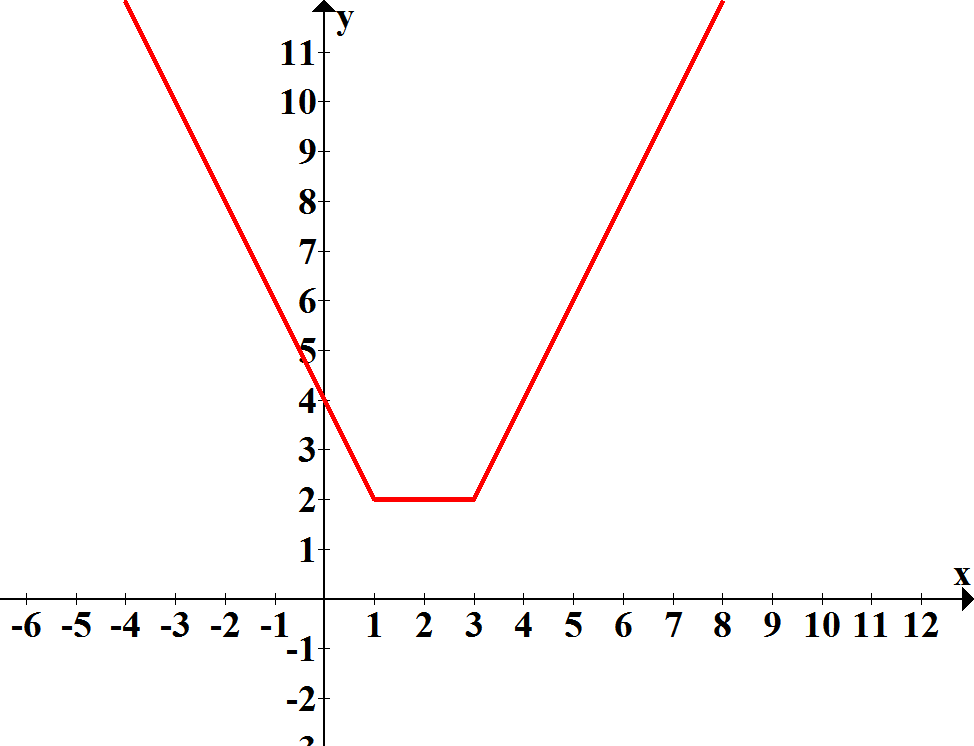
***Відповідь:***

1. **Знайти всі значення параметра а при яких найменше значення функції *f(x)* дорівнює найбільшому значенню функції *g(x).***

***f(x)=|x - 1|+|x - 3|+a***

***g(x)=***

Розв’язання

Графік функції *g(x)*- парабола, вітки вниз, найбільшого значення досягає в вершині: *х = 0*;  *g(x)=*

*f(x)=|x - 1|+|x - 3|+a*

Побудуємо графік

у =*|x - 1|+|x - 3|*.

Найменше значення у = 2+*a*

Значить

***Відповідь:***

1. **Розв’яжіть рівняння для всіх дійсних значень параметра *а.***

***|x2 - 4|-|x2 - 9| =***

Розв’язання

Розглянемо дві функції *f(x)= |x2 - 4|-|x2 - 9|* і *g(x)=.*

Схематично зобразимо графік *f(x)*.

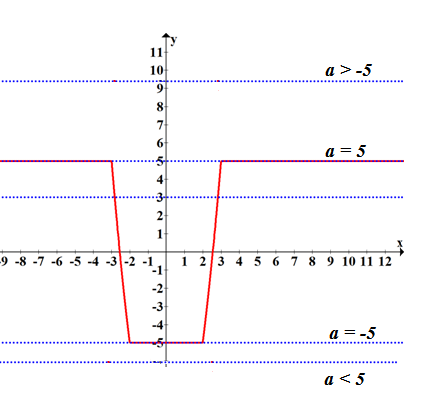
Для цього знайдемо нулі модулів і знаки модулів на проміжках

Для х ≤ -3 або х ≥ 3, *f(x)=5*

Для -3< x < -2 і 2< x < 3, *f(x)=2х2- 13*

Для -2< x < 2 *f(x)= - 5*

******

******

***Відповідь:*** якщо *< -5 або >5,* то рівняння розв’язків не має

якщо  *= -5,* то

якщо  *= 5,* то

якщо  **то**

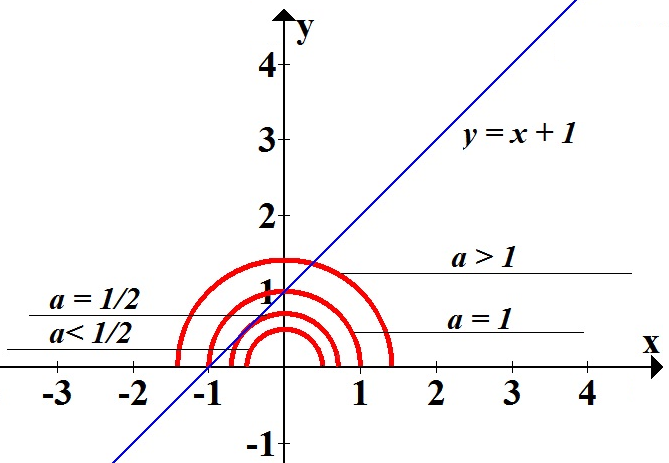
1. **Розв’яжіть рівняння для всіх дійсних значень параметра *а***

Розв’язання

Розглянемо дві функції *f(x)=* і *g(x)=*

Побудуємо графік *f(x)*. Це півколо радіусом для *f(x)* ≥ 0

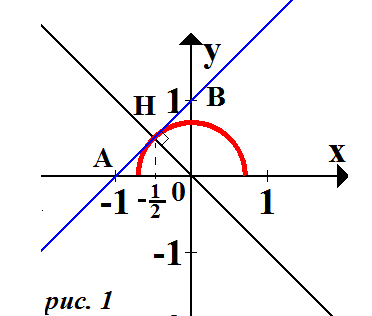
Графік  *g(x)=* – пряма



1. Пряма дотикається до півкола:

З прямокутного трикутника ОАВ (рис.1)

, тобто



1. Пряма не перетинає півколо коли
2. Пряма перетинає півколо в 2-х точках (розв’язках рівняння ), якщо

тобто:

1. Пряма перетинає півколо в одній точці:

це більший з двох розв’язків даного рівняння -

**Відповідь:** якщо

якщо

якщо

якщо

1. **ЗНО 2013. Знайдіть найменше ціле а при яких рівняння має рівно 2 розв’язки.**

Розв’язання

Виконаємо перетворення і перепишемо рівняння у вигляді:

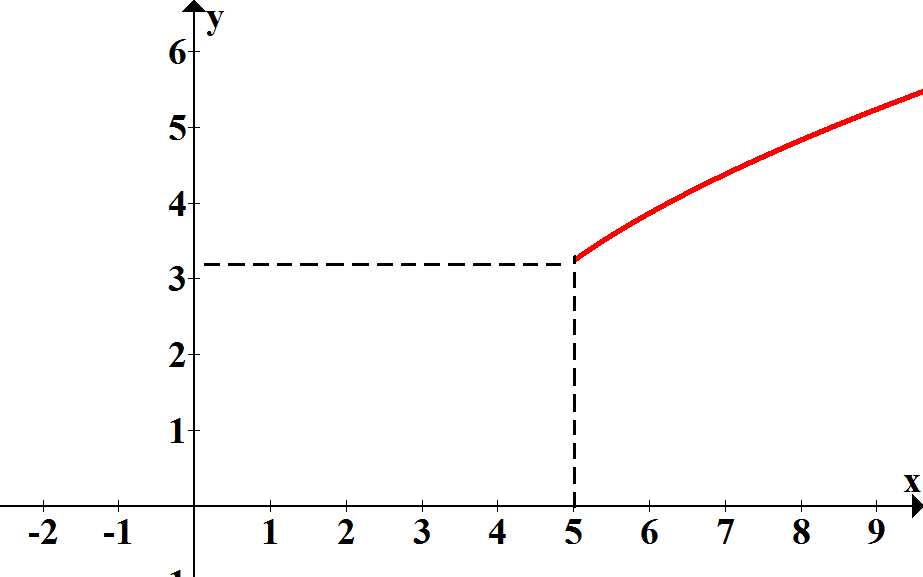
ОДЗ:

*x=5* – розв’язок

значить задача зводиться до того , щоб знайти *а*, при якому рівняння має один розв’язок, який ≠ 5

функція монотонно зростає на всій ОДЗ, тобто має найменше значення в *х=5.*

Підставимо *х=5* в рівняння:



За умовою задачі а – ціле, значить

Найменше з таких значень

**Відповідь:.**

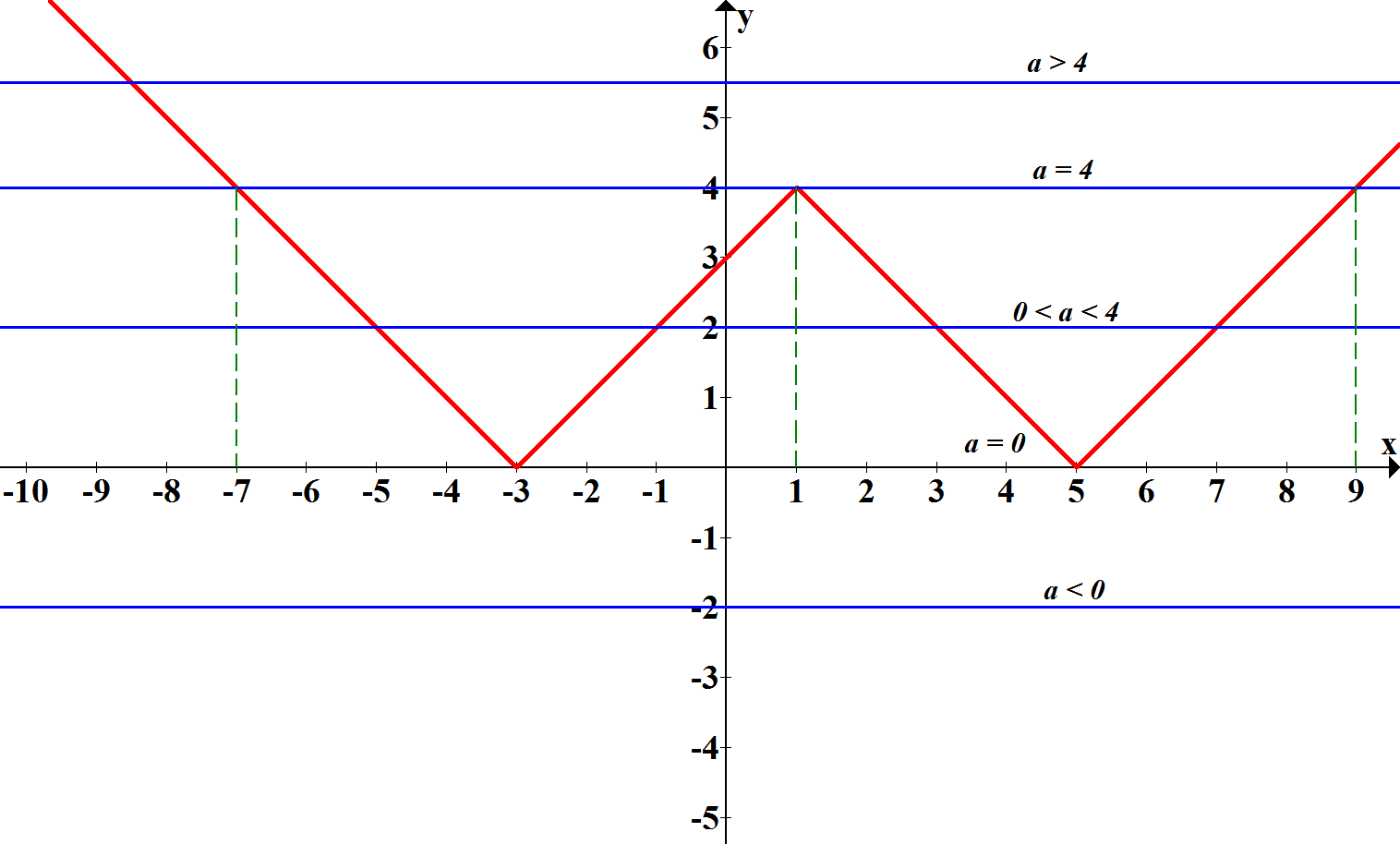
1. **Розв’яжіть рівняння для всіх дійсних значень параметра *а***

Розв’язання

Розглянемо дві функції *f(x)=* і *g(x)=*

Пробудуємо графік функції *f(x)=* за допомогою геометричних перетворень

Графік *g(x)= -* горизонтальна пряма, що рухається вгору-вниз по осі *Оу*



От і все, можемо писати відповідь.

**Відповідь:** якщо

якщо

якщо

якщо

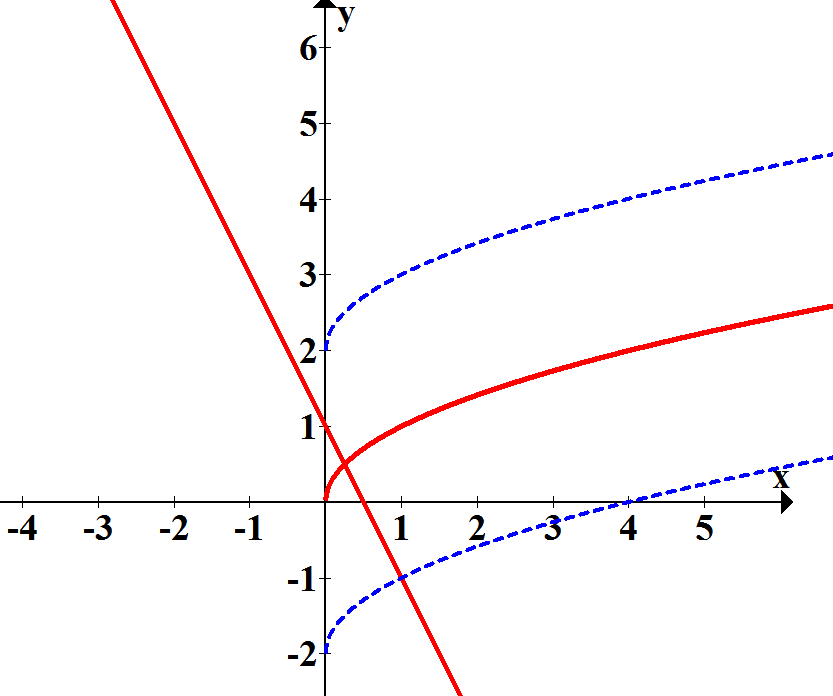
якщо

* 1. **Системи рівнянь**

1. **Скільки розв’язків має система в залежності від параметра *а*?**

Розв’язання

Виконаємо перетворення і запишемо систему в виді:



Побудуємо графік першого рівняння і схематично зобразимо графік другого.

це графік , який рухається вгору-вниз по осі Ох. Очевидно, що при - графіки перетинаються в одній точці, а при – графіки не перетинатимуться.

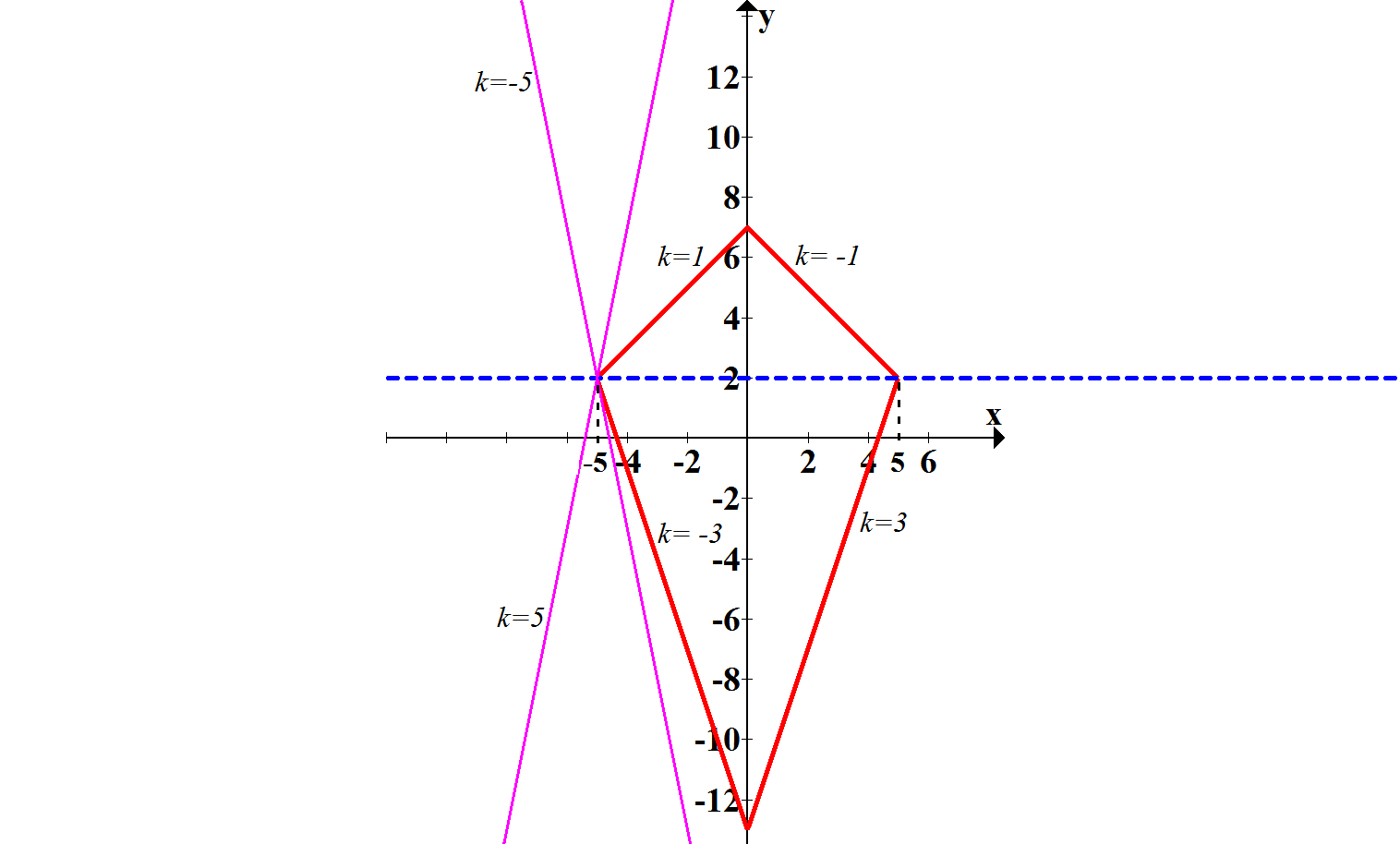
**Відповідь:** якщо - система має 1 розв’язок

якщо - система розв’язків не має

1. **ЗНО 2014. Знайдіть усі від’ємні значення параметра *а* при яких система рівнянь має єдиний розв’язок. Якщо таке значення одне, то запишіть його у відповідь. Якщо їх кілька – то у відповідь запишіть їхню суму.**

Розв’язання

Після очевидних перетворень система набере вигляду:

 → →

Рівняння запишемо в виді

Графічним зображенням цієї сукупності є ромбоїд

Графічним зображенням сукупності є «сім’я прямих» з кутовим коефіцієнтом 5 і -5.

Оскільки *а<0* , то прямі проходять через точку *(-5;2).* Отже,

або

**Відповідь:** **-25**

**3) Знайдіть всі значення параметра при якому система має безліч розв’язків**

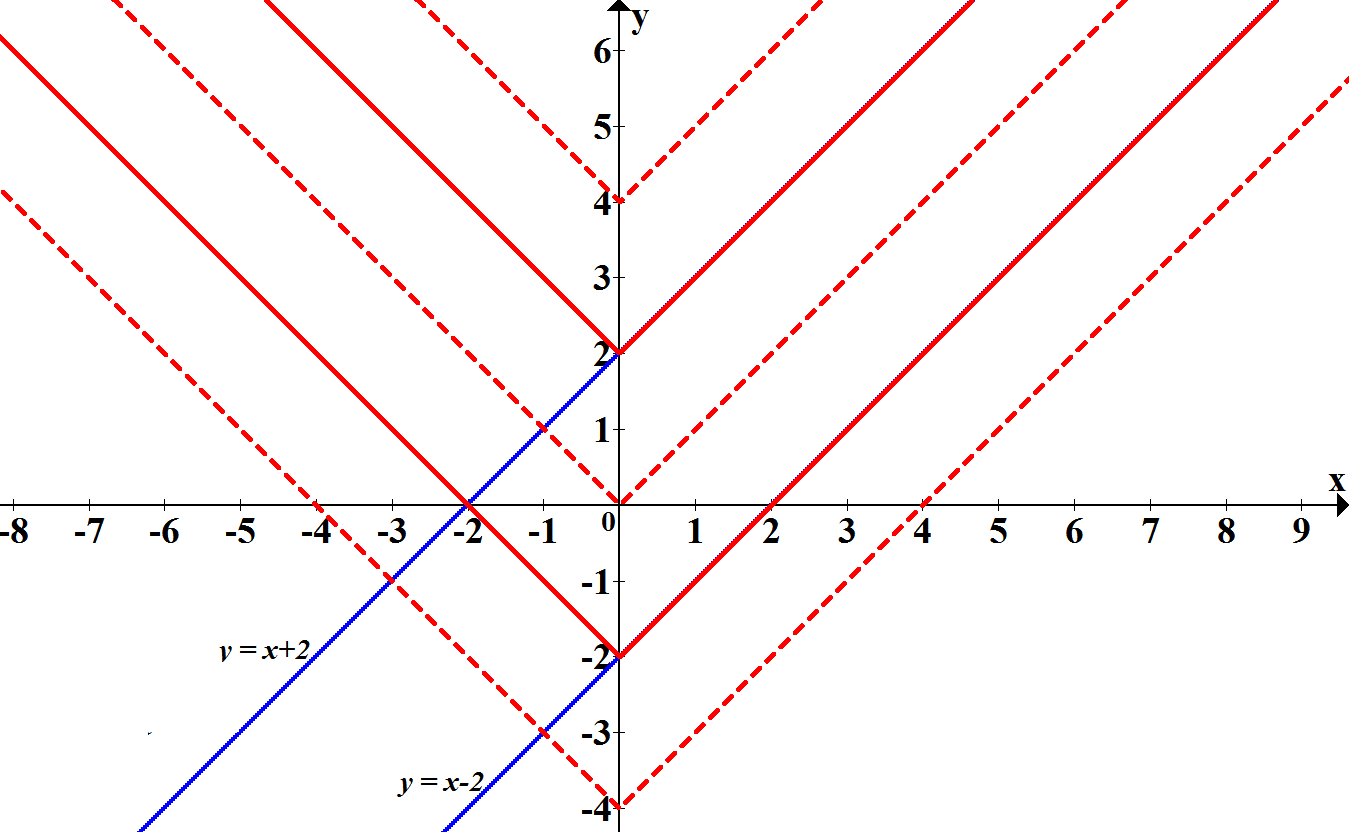
Розв’язання

Побудуємо графіки обох рівнянь в одній системі координат.

Графік першого рівняння – дві паралельні прямі: ***y = x + 2*** і ***y = x – 2***

Графік другого рівняння – кут, що рухається вгору-вниз по вісі ***Оу***.

Кутові коефіцієнти прямих і правої сторони кута однакові і дорівнюють 1.



Очевидно, що система має безліч розв’язків при ***а = ±2***

**Відповідь:** **-2; 2.**

**4) Знайдіть всі значення параметра при якому система має один розв’язок**

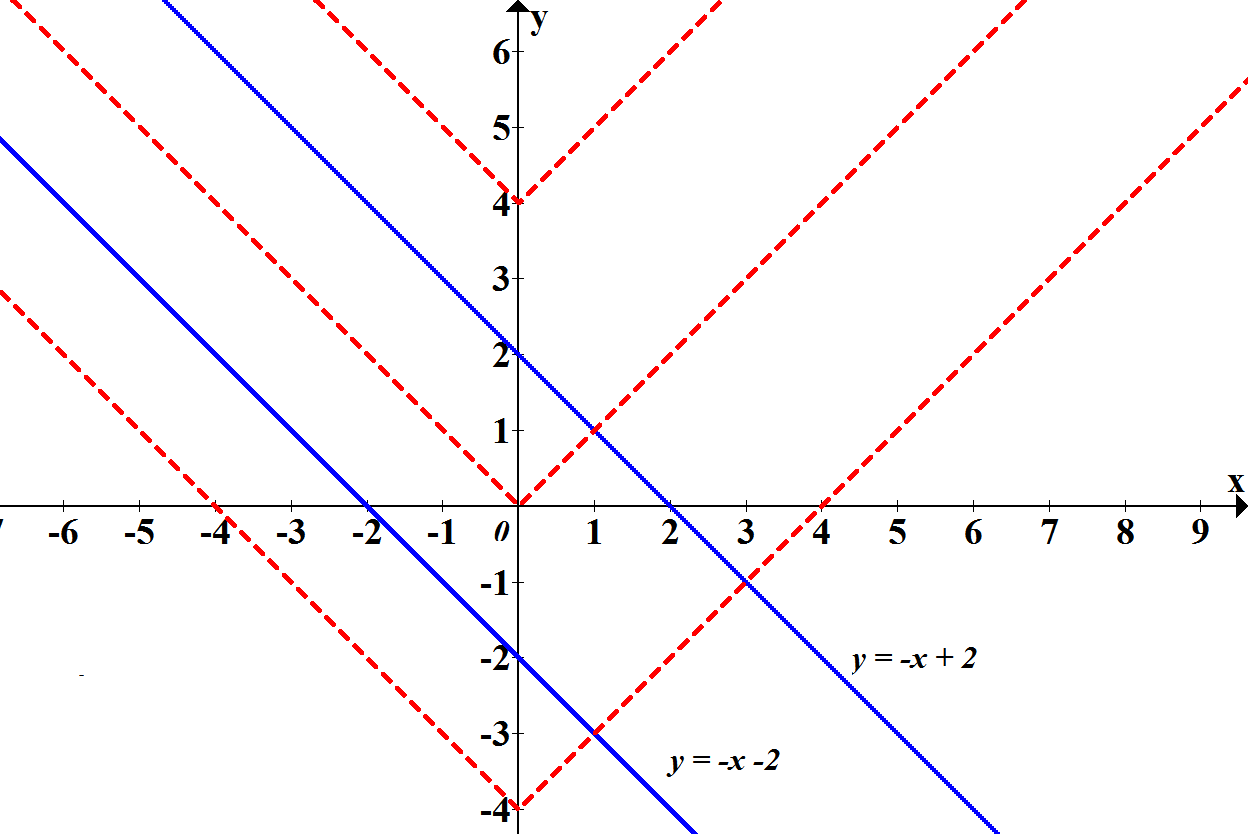
Розв’язання

Побудуємо графіки обох рівнянь в одній системі координат.

Графік першого рівняння – дві паралельні прямі: ***y = -x + 2*** і ***y = -x – 2***

Графік другого рівняння – кут, що рухається вгору-вниз по вісі ***Оу***.

Кутові коефіцієнти прямих і лівої сторони кута однакові і дорівнюють -1.



Очевидно, що система має один розв’язок при ***-2 < а < 2***

**Відповідь:**

**5) Знайдіть всі значення параметра при якому система має рівно два розв’язки**

Розв’язання

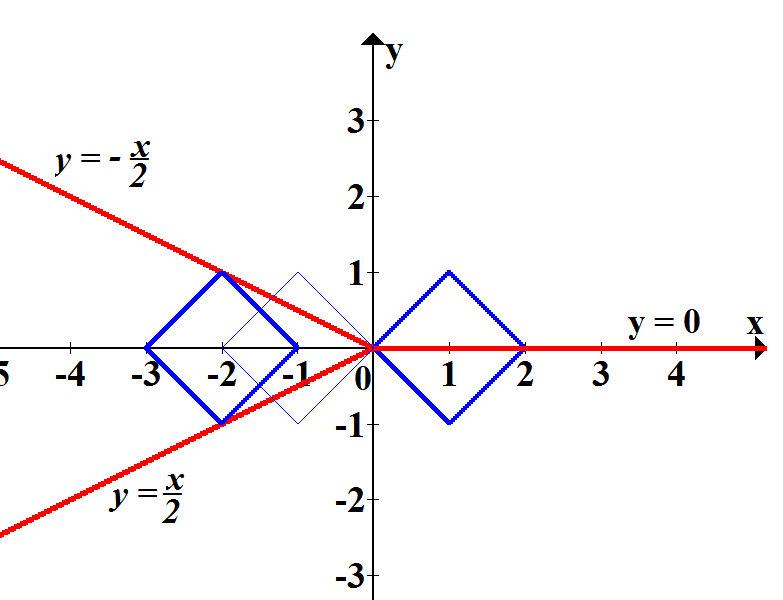
Побудуємо графіки обох рівнянь в одній системі координат.

Для побудови графіка першого рівняння розкриваємо модуль.

Графік другого рівняння – квадрат, що рухається вздовж Ох.

Якщо *а ≥ 1,* то система завжди має 2 розв’язки.

Ще один випадок двох розв’язків матимемо, при ***а = -2***

В інших випадках система не має розв’язків, або їх кількість не дорівнює двом.

**Відповідь:**

**6) Знайдіть всі значення параметра при якому система має один розв’язок**

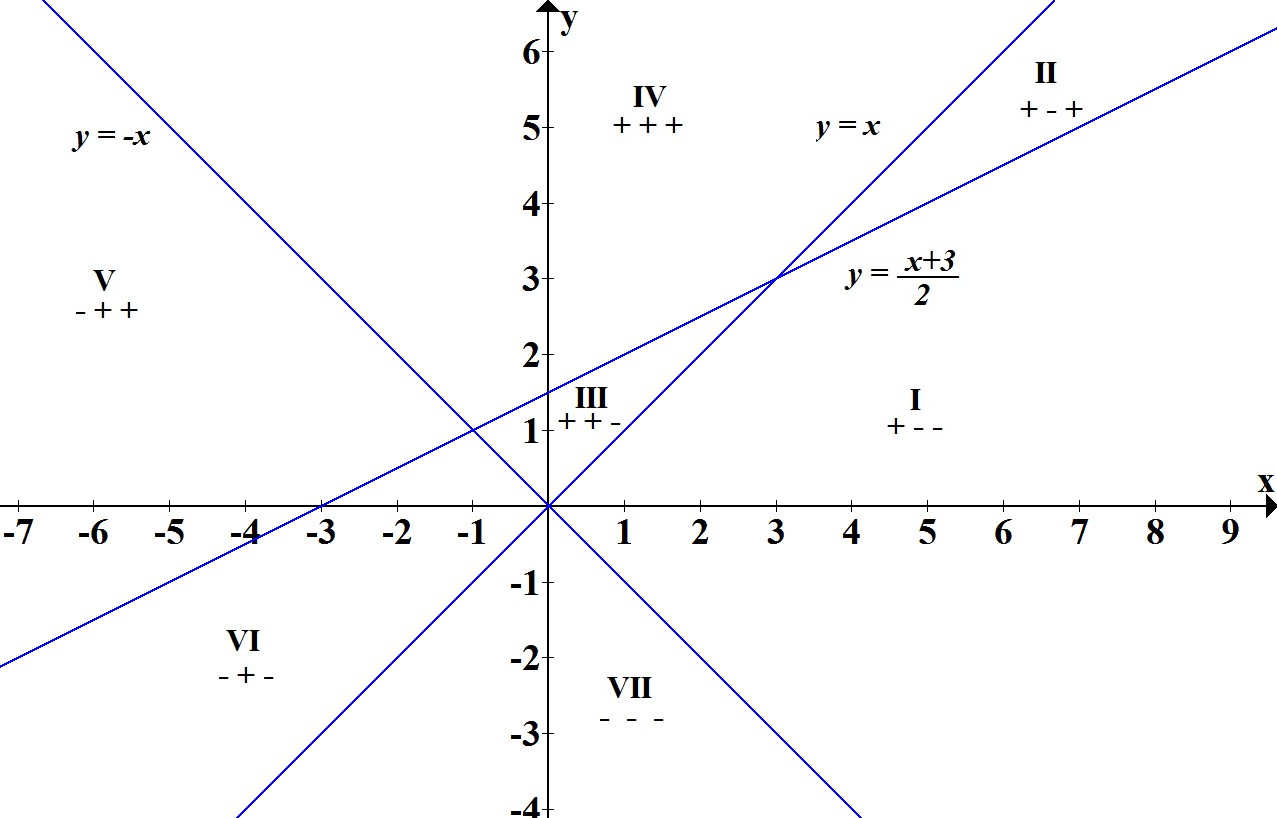
Розв’язання

Перепишемо дану систему в виді:

Побудуємо графіки обох рівнянь в одній системі координат.

Аналогічно попередньому завданню для побудови графіка першого рівняння розбиваємо нулями модулів координатну площину на частини, шукаємо знаки модулів в кожній частині і, розкриваючи модуль, будуємо графіки в кожній частині координатної площини. Щоб знайти знаки модулів в кожній частині площині підставляємо будь-яку точку з цієї частини в кожний модуль.

Нулі модулів:



Будуємо графік рівняння:

І.

- графіку належить частина прямої

ІІ.

- графіку належить 1 точка – (3; 3)

IIІ.

- графіку належать всі точки частини ІІІ

IV.

- графіку належить частина прямої

V.

- графіку належить 1 точка – (-1; 1)

VI.

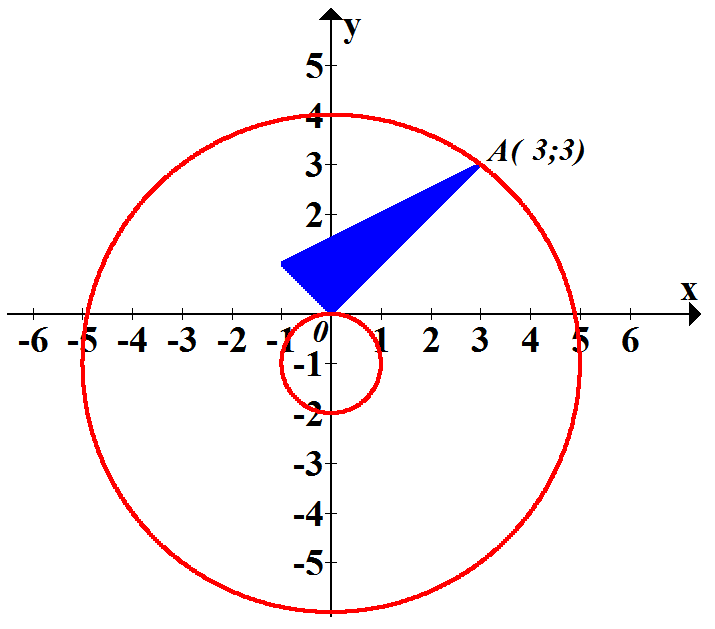
- графіку належить частина прямої

VII.

- графіку належить 1 точка – (0; 0)

Тобто графік першого рівняння – трикутник (частина ІІІ) разом з його внутрішньою областю.

Графік другого рівняння – сім’я концентричних кіл з центром в т.(0;-1)

Система має один розв’язок коли трикутник і коло дотикаються.

Це можливо в т.(0;0) і в т.(3;3). Підставляючи координати точок в друге рівняння, одержуємо:

, або

**Відповідь: -5, -1, 1, 5.**

**3.3. Нерівності.**

1. **Розв’яжіть нерівність для всіх дійсних значень параметра *а.***

***|x - 2|+|x + 3|≤ a***

Розв’язання

Побудуємо графіки функцій  *у=|x - 2|+|x + 3| і у=а*

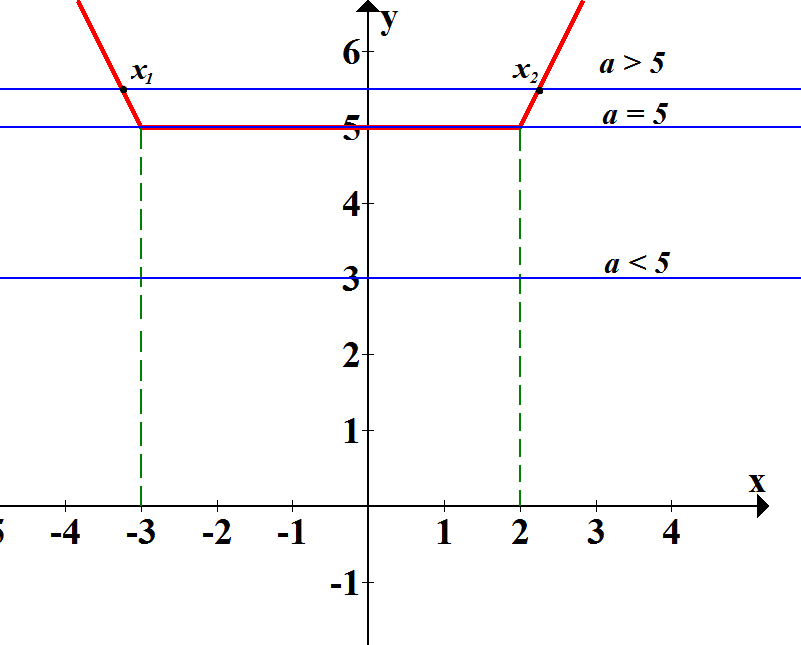
При *a<5* графіки не перетинаються, і ніяка частина *у=|x - 2|+|x + 3|*  не лежить нижче прямої, тож нерівність розв’язків не має

При *a=5* графіки мають спільний відрізок який і є розв’язком

При *a >5* графіки перетинаються в двох точках, частина графіка *у=|x - 2|+|x + 3|*  лежить нижче прямої *у = а*

Знайдемо точки перетину *у=|x - 2|+|x + 3|* і *у=а*

При *а>5* графіки перетинаються в точках *х1=* і *х2=*



**Відповідь:** якщо *a<5*

якщо  *= 5*,

якщо

1. **Розв’яжіть нерівність для всіх дійсних значень параметра *а.***

Розв’язання

Розглянемо дві функції *f(x)=* і *g(x)=*

Графік *f(x)=*  - півколо в додатній площині з радіусом 1;

графік *g(x)=* – пряма: *k =-1* , що рухається вздовж осей координат. Розв’язками нерівності будуть абсциси тих точок півкола, які лежать нижче прямої.

Побудуємо графіки функцій.

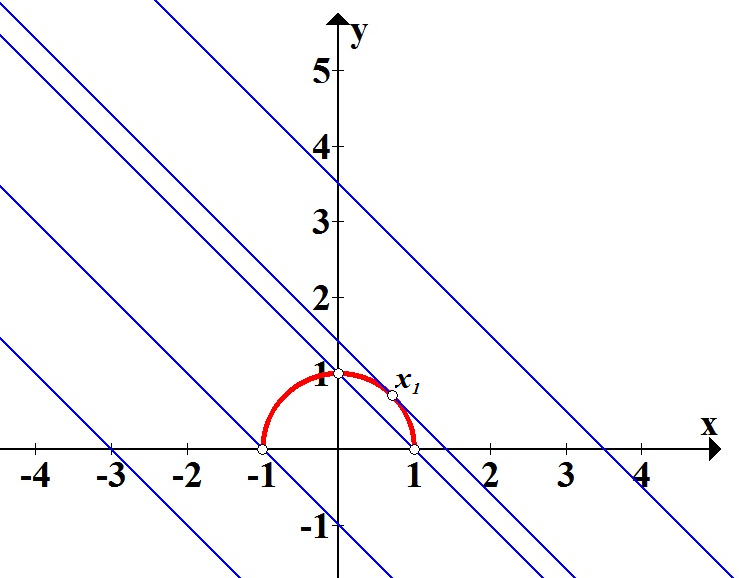
Очевидно, що при *a≤-1* пряма не перетинає півколо, значить нерівність розв’язків не має.

Якщо , то пряма перетинає коло в одній точці, тож розв’язком нерівності буде один інтервал.

Якщо то пряма перетинає коло в двох точках, розв’язок нерівності – 2 інтервали.

Знайдемо координати точок перетину прямої з колом. Для цього розв’яжемо рівняння:

Пряма приймає положення дотичної коли →



**Відповідь:** якщо

якщо

якщо

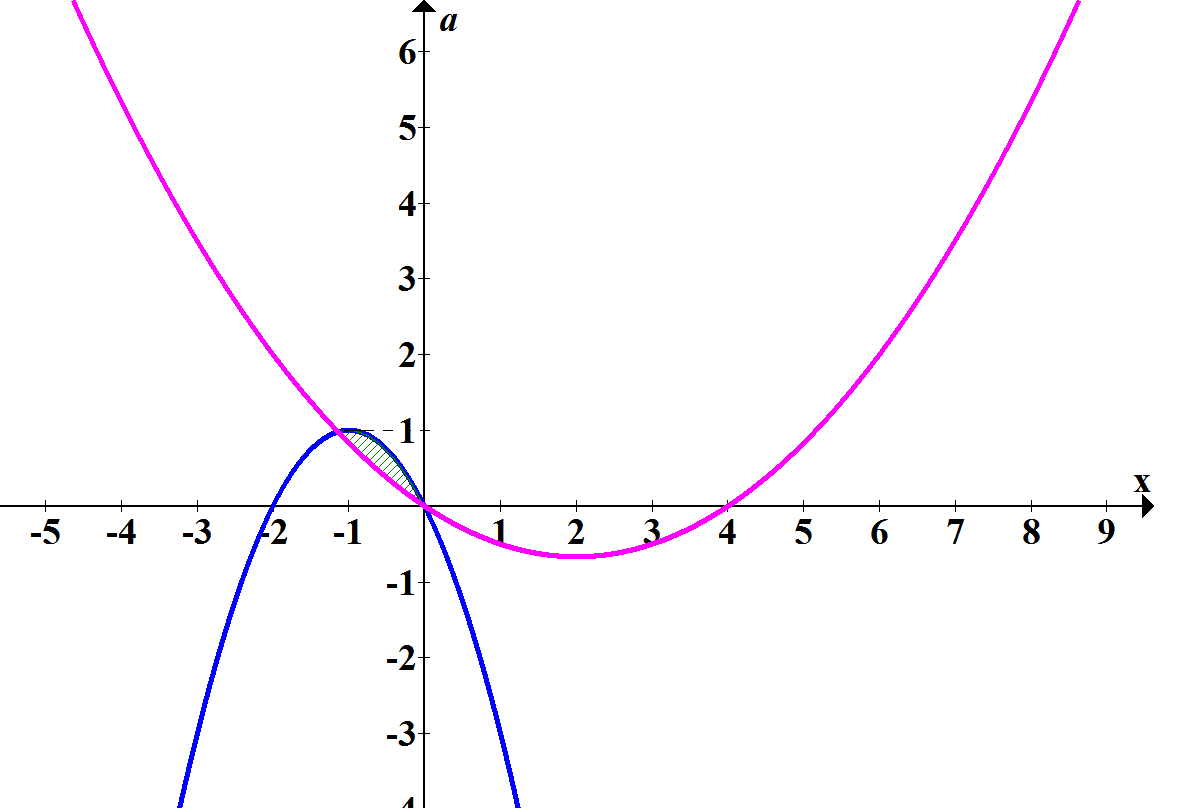
якщо

якщо

1. **Знайдіть усі значення параметра *а* при яких система має єдиний розв’язок.**

Розв’язання

Перепишемо систему в виді:

Розглянемо систему координат***Xoa.*** Побудуємо в цій системі графіки функцій та

Розв’язком системи нерівностей є заштрихована частина графіку.

Система матиме один розв’язок лише при ***а = 0*** та ***а = -1***.

**Відповідь: 0; 1.**

1. **Знайдіть усі значення параметра *а* при яких множина розв’язків системи є відрізок вказаної довжини. *(l = 1)***

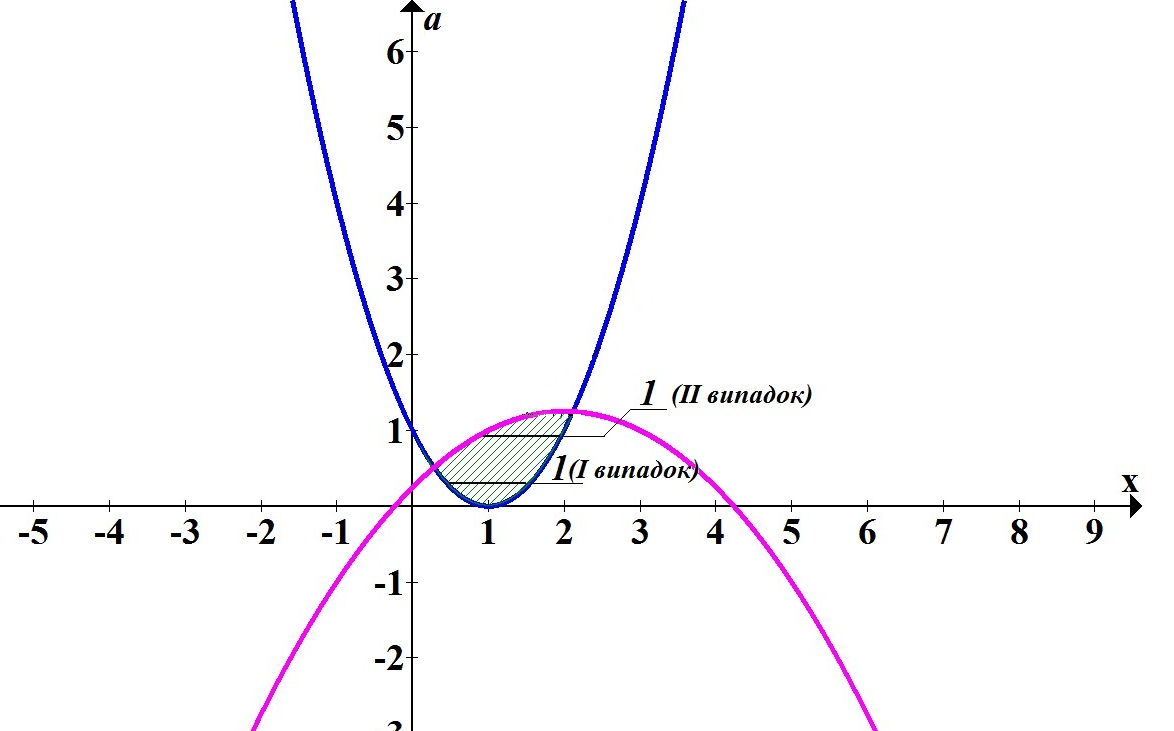
Розв’язання

Перепишемо систему в виді:

**→**

Розглянемо систему координат***Xoa.*** Побудуємо в цій системі графіки функцій

та



Може бути два випадки, коли розв’язком системи є відрізок довжиною 1. Знайдемо при якому значенню параметра це відбувається.

**І випадок**. Знайдемо корені рівняння:

Шуканий випадок буде при умові:

**ІІ випадок**. Знайдемо корені рівняння:

Виберемо менший корінь:

Шуканий випадок буде при умові:

**Відповідь: 1, .**

**5) Розв’яжіть нерівність для всіх дійсних значень параметра *а.***

Розв’язання

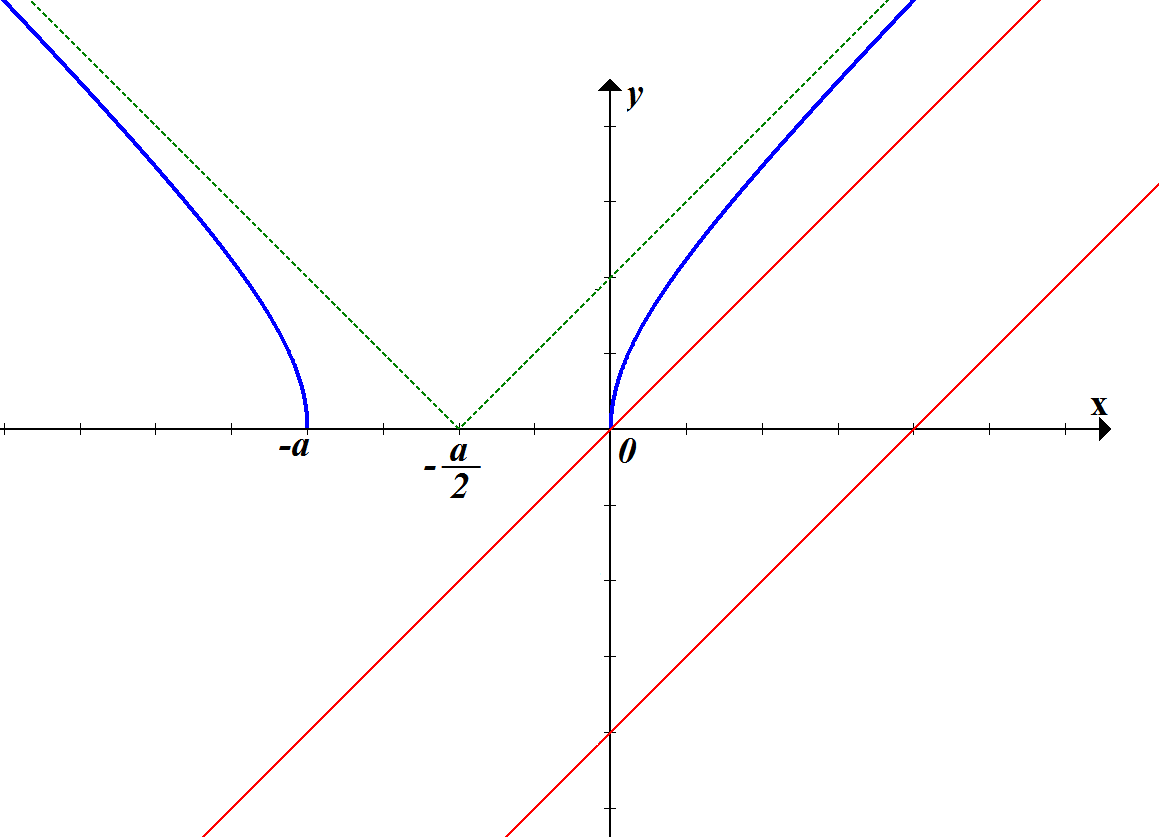
Розглянемо дві функції та **.**

Побудуємо їх графіки в одній системі координат.

Розглянемо такі випадки:

І. Якщо  **то**

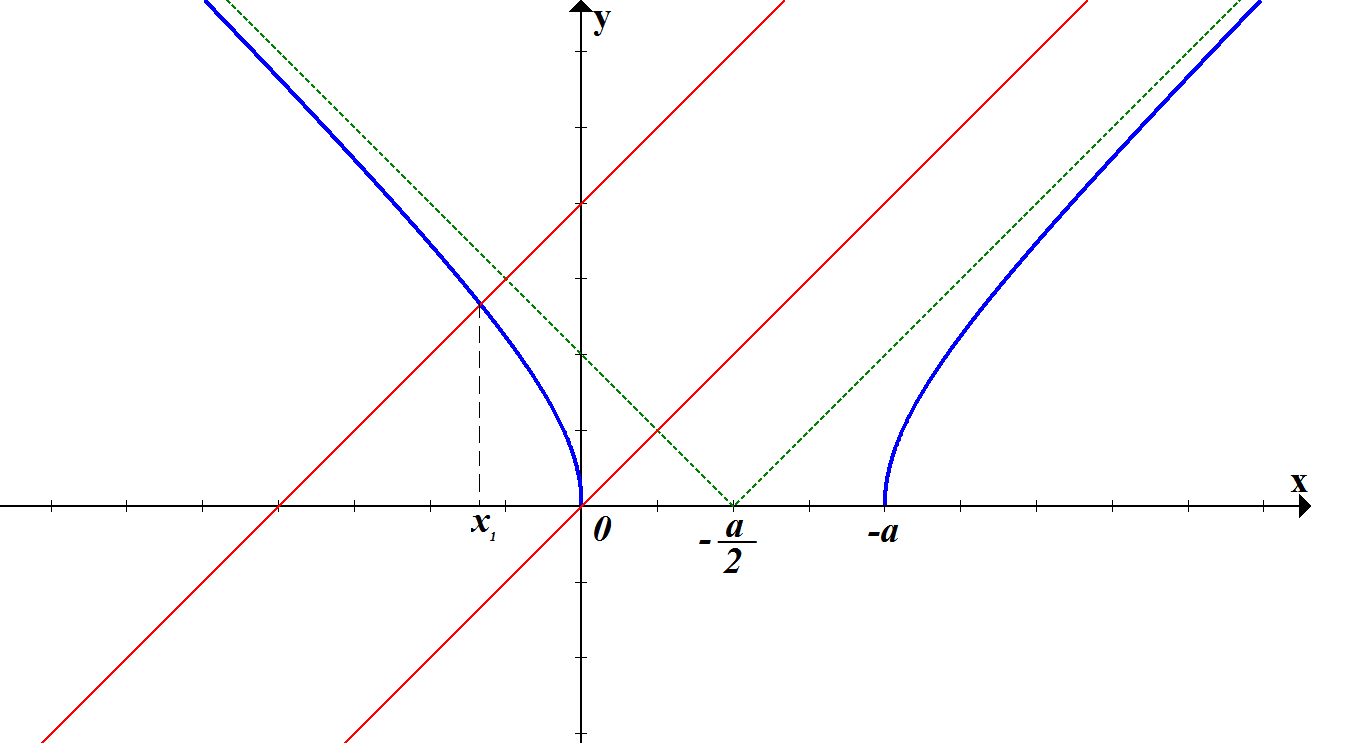
ІІ. Якщо тографік має вигляд**:**

**

Пряма () завжди буде проходити нижче графіка . Тож розв’язками нерівності буде область визначення функції **.** Тобто

**якщо**

ІІІ. Якщо то графік має такий вигляд:



Так як кутові коефіцієнти прямої і асимптоти однакові, пряма буде перетинати графік в одній точці . Знайдемо ***х1***.

Тобто, якщо

**якщо**

**Відповідь:** якщо  **то**

якщо ;

**якщо**

**Список використаних джерел:**

1. Г.В.Апостолова, В.В.Ясінський Перші зустрічі з параметром. - К.: Факт, 2006. – 324с.
2. В.В. Ясінський Математика. Навчальний посібник для слухачів ІДП НТУУ «КПІ».-К.: ІДП НТУУ «КПІ», 2014. – 472с.
3. Є.П.Нелін Алгебра і початки аналізу. Підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. – Х. : Гімназія, 2010. – 416с.